

Eksplorasi Kalkulus Integral dalam Mengukur Volume Benda Hasil Rotasi Kurva Sederhana Berbantu Geogebra

Lisma Dian Kartika Sari^{1)*}, Zainul Munawwir¹⁾, Darsih Idayani²⁾

¹⁾STKIP PGRI Situbondo

²⁾Universitas Terbuka

*Coresponding Author: lismadian.ks@gmail.com

ABSTRAK

Kalkulus integral merupakan salah satu komponen utama dalam kalkulus yang memiliki peran signifikan dalam berbagai penerapan matematis, salah satunya dalam menghitung volume benda putar. Penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi penerapan kalkulus integral dalam menghitung volume benda hasil rotasi kurva sederhana dengan memanfaatkan perangkat lunak Geogebra sebagai alat bantu visualisasi. Metode penelitian yang digunakan adalah deskriptif-eksploratif dengan langkah: (1) menentukan fungsi dan interval yang akan dianalisis, (2) menghitung volume secara analitik menggunakan metode integral, (3) memodelkan kurva dan rotasi dalam Geogebra 3D, serta (4) membandingkan hasil perhitungan dengan estimasi visual yang ditampilkan Geogebra. Beberapa fungsi yang digunakan dalam penelitian ini adalah $y = x^2$, $y = 2x+1$, dan $y = \sin(x)$ dengan rotasi terhadap sumbu-x maupun sumbu-y. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai volume yang diperoleh melalui Geogebra sangat mendekati hasil analitik, dengan selisih kurang dari 1%. Visualisasi tiga dimensi yang dihasilkan Geogebra terbukti efektif dalam memperkuat pemahaman konsep integral, karena peserta didik dapat mengamati bentuk nyata dari volume benda putar dan memverifikasi hasil perhitungan integral. Simpulan dari penelitian ini adalah bahwa integrasi antara metode analitik dan bantuan Geogebra tidak hanya dapat meningkatkan akurasi, tetapi juga memperkuat aspek visual dan konseptual dalam pembelajaran kalkulus.

Kata Kunci: Kalkulus Integral; Volume Benda Putar; Geogebra

Received: 2 Oct 2025; Revised: 27 Oct 2025; Accepted: 28 Oct 2025; Available Online: 29 Oct 2025

This is an open access article under the CC - BY license.



PENDAHULUAN

Kalkulus integral merupakan salah satu cabang matematika yang esensial dalam memahami perubahan dan akumulasi, terutama dalam konteks pengukuran area dan volume. Salah satu aplikasi penting dari kalkulus integral adalah dalam menghitung volume benda hasil rotasi kurva terhadap sumbu tertentu, yang dikenal sebagai metode benda putar. Kalkulus integral merupakan salah satu komponen utama dalam kalkulus yang memiliki peran signifikan dalam berbagai penerapan matematis, salah satunya dalam menghitung volume benda putar. Integral pada dasarnya digunakan untuk menghitung akumulasi suatu besaran, seperti luas daerah, panjang kurva, dan volume benda yang dibatasi oleh kurva dan sumbu tertentu (Jr et al., 2014). Pemahaman konsep volume benda putar juga berkaitan erat dengan konsep limit, fungsi kontinyu, serta integral tentu sebagai akumulasi dari partisi-partisi tak hingga dari luas penampang.

Pendekatan ini sesuai dengan filosofi kalkulus sebagai ilmu yang mempelajari perubahan dan akumulasi secara kontinu (Stewart, 2020). Dalam pemahaman volume benda putar ini, sering kali peserta didik mengalami kesulitan karena melibatkan visualisasi tiga dimensi dan pemahaman abstrak mengenai proses rotasi dan integrasi. Menurut Tasman & Ahmad, (2018), banyak peserta didik mengalami kesulitan dalam memahami konsep volume benda putar karena keterbatasan dalam membayangkan bentuk tiga dimensi dari rotasi kurva dua dimensi. Kesulitan ini dapat menghambat pemahaman mendalam terhadap konsep integral dan aplikasinya dalam kehidupan nyata. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan pembelajaran yang dapat membantu peserta didik dalam memvisualisasikan dan memahami konsep ini secara lebih konkret dan interaktif dengan bantuan teknologi informasi terkini.

Perkembangan teknologi informasi telah membawa dampak signifikan dalam dunia pendidikan, termasuk dalam pembelajaran matematika. Salah satu perangkat lunak yang telah banyak digunakan dalam pembelajaran matematika adalah Geogebra, sebuah aplikasi open-source yang mengintegrasikan aljabar, geometri, dan kalkulus dalam satu platform interaktif. Geogebra memungkinkan pengguna untuk memvisualisasikan konsep matematika secara dinamis, termasuk proses rotasi kurva dan pembentukan volume benda putar. Menurut (Irvan, 2024), penggunaan Geogebra dalam pembelajaran kalkulus integral dapat membantu peserta didik dalam memahami konsep volume benda putar melalui visualisasi yang interaktif dan manipulatif. Dengan fitur-fitur seperti tampilan 3D dan kemampuan untuk memanipulasi parameter secara real-time, Geogebra memberikan pengalaman belajar yang lebih mendalam dan intuitif bagi peserta didik. Hal ini sejalan dengan temuan (Kado & Dem, 2020) yang menunjukkan bahwa penggunaan Geogebra dapat meningkatkan pemahaman konseptual peserta didik dalam pembelajaran integral tentu. Geogebra telah terbukti berguna untuk membantu peserta didik memvisualisasikan konsep dan memecahkan masalah kalkulus integral (Fatihah & Yahfizham, 2024), serta mampu membangun pengertian konseptual yang kuat (Hayati & Ulya, 2022). Menurut Sofyan et al., (2020) dalam penelitian mereka menemukan bahwa penggunaan Geogebra dapat meningkatkan kemampuan peserta didik dalam menentukan area antara dua kurva dan volume benda putar melalui simulasi interaktif. Hasil penelitian oleh Nuratifah et al., (2024) menunjukkan bahwa penggunaan Geogebra dalam pembelajaran fungsi dapat meningkatkan kemampuan representasi visual matematis peserta didik secara signifikan dengan perolehan skor rata-rata peserta didik meningkat dari 31,6 pada pre-test menjadi 81,16 pada post-test setelah menggunakan Geogebra, yang menunjukkan bahwa penggunaan Geogebra memiliki dampak yang sangat tinggi dalam meningkatkan kemampuan representasi visual matematis peserta didik.

Beberapa penelitian menunjukkan bahwa peserta didik dapat memperoleh pemahaman konseptual yang lebih baik dan kemampuan visualisasi yang lebih baik dengan menggunakan Geogebra. Meldi et al., (2022) dalam penelitiannya mengimplementasikan teknologi digital, termasuk Geogebra, dalam perkuliahan kalkulus integral. Hasilnya menunjukkan bahwa penggunaan Geogebra membantu peserta didik dalam menyelesaikan masalah luas daerah antar kurva, yang merupakan dasar dalam memahami volume benda putar. Nasution et al., (2020) menggabungkan etnomatematika berbantuan Geogebra dan model pembelajaran berbasis masalah untuk meningkatkan kemampuan komunikasi matematis peserta didik. Meskipun fokus utama bukan pada volume benda putar, pendekatan ini menunjukkan bahwa Geogebra efektif dalam meningkatkan pemahaman konsep matematika secara umum. Subagio et al., (2021) menerapkan model *Discovery Learning* dan *Problem-Based Learning* berbantuan Geogebra untuk meningkatkan motivasi belajar peserta didik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penggunaan Geogebra dapat meningkatkan keterlibatan peserta didik dalam pembelajaran matematika, termasuk pada topik-topik yang kompleks seperti volume benda putar. Ma'ulah et al., (2021) meneliti pembelajaran matematika dengan media Geogebra pada materi tiga dimensi, yang menunjukkan bahwa Geogebra efektif dalam membantu peserta didik memahami konsep tiga dimensi, yang merupakan dasar dalam memahami volume benda putar. Penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa Geogebra merupakan alat yang efektif dalam pembelajaran kalkulus, khususnya dalam membantu peserta didik memahami konsep volume benda putar melalui visualisasi dan interaktivitas. Dengan menyediakan lingkungan belajar yang memungkinkan eksplorasi dan eksperimen, Geogebra mendorong peserta didik untuk lebih aktif dalam proses pembelajaran dan mengembangkan pemahaman yang lebih mendalam terhadap konsep-konsep matematika. Selain itu, Geogebra juga memungkinkan peserta didik untuk memverifikasi hasil perhitungan mereka secara visual, yang dapat meningkatkan kepercayaan diri dan kemandirian dalam belajar. Hal ini menunjukkan bahwa integrasi teknologi seperti Geogebra dalam pembelajaran kalkulus integral tidak hanya membantu dalam pemahaman konsep, tetapi juga dalam pengembangan keterampilan pemecahan masalah yang kritis.

Meskipun berbagai penelitian telah menunjukkan manfaat penggunaan Geogebra dalam pembelajaran kalkulus integral, masih terdapat kebutuhan akan penelitian eksploratif yang lebih mendalam untuk memahami bagaimana Geogebra dapat diintegrasikan secara efektif dalam pembelajaran volume benda putar. Penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi bagaimana Geogebra dapat digunakan sebagai alat bantu dalam memahami dan menghitung volume benda hasil rotasi kurva sederhana. Melalui pendekatan eksploratif, penelitian ini mengkaji bagaimana peserta didik berinteraksi dengan Geogebra dalam memahami konsep volume benda putar, serta bagaimana penggunaan Geogebra dapat mempengaruhi pemahaman konseptual dan kemampuan pemecahan masalah matematis. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi teoretis dalam pengembangan pembelajaran berbasis teknologi serta kontribusi praktis bagi pendidik dalam merancang pembelajaran kalkulus integral yang lebih visual dan interaktif.

METODE

Penelitian ini menggunakan jenis atau pendekatan penelitian eksploratif kualitatif yaitu penelitian yang bertujuan untuk memahami fenomena secara mendalam dan kontekstual (Sugiyono & Sofia Yustiyani Suryandari, 2017). Pendekatan ini dipilih karena penelitian tidak berfokus pada pengukuran kuantitatif hasil belajar, tetapi lebih pada eksplorasi proses pemahaman konsep volume benda putar melalui kalkulus integral dengan bantuan Geogebra. Objek dalam penelitian ini yakni penerapan konsep kalkulus integral untuk menghitung volume benda hasil rotasi kurva sederhana dengan bantuan perangkat lunak Geogebra. Sehubungan penelitian ini murni eksploratif (tanpa responden), maka subjek dalam penelitian ini yakni berupa proses eksplorasi visual dan analitik terhadap fungsi-fungsi matematika dalam Geogebra yaitu fungsi linear, kuadrat, dan eksponensial yang dijadikan bahan eksplorasi dalam perhitungan dan visualisasi volume benda putar. Prosedur penelitian ini disusun berdasarkan pendekatan Miles, Huberman, dan Saldaña (2013), yang menekankan proses siklikal dan reflektif dalam pengumpulan dan pengolahan data kualitatif.

Metode penelitian eksploratif kualitatif terdiri dari beberapa tahapan yang perlu dilakukan yakni antara lain pertama identifikasi objek eksplorasi, pada tahap ini peneliti menentukan fungsi-fungsi matematika sederhana untuk dijadikan kurva rotasi. Kedua, perhitungan volume secara manual, pada tahap ini peneliti melakukan perhitungan volume benda putar dengan menggunakan kalkulus integral (*disk method* dan *shell method*). Ketiga adalah visualisasi menggunakan geogebra, pada tahap ini penelitian membuat visualisasi kurva dan volume hasil rotasi menggunakan Geogebra. Keempat adalah pencatatan proses dan refleksi, pada tahap ini peneliti membandingkan hasil perhitungan manual dengan visualisasi/hasil numerik dari Geogebra. Kelima adalah analisis dan triangulasi data, pada tahap ini peneliti menganalisis proses, kesesuaian hasil, serta refleksi konseptual dari eksplorasi tersebut. Teknik triangulasi data yang digunakan dalam penelitian ini yakni triangulasi sumber yaitu membandingkan hasil manual, hasil Geogebra, dan teori dari literatur. Hal ini dilakukan untuk menguji konsistensi dan validitas hasil eksplorasi.

Teknik serta instrumen yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yakni mengkaji buku, jurnal, dan artikel yang relevan mengenai kalkulus integral, volume benda putar, dan pemanfaatan Geogebra. Teknik studi literatur ini dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi melalui telaah terhadap berbagai sumber tertulis seperti buku, jurnal ilmiah, artikel, dan sumber daring yang relevan. Tujuannya adalah memperoleh landasan teori yang kuat dan mendalam untuk menjelaskan konsep-konsep yang diteliti. Selain itu teknik dokumentasi dan eksperimen mandiri juga dilakukan untuk memperoleh data faktual yang mendukung hasil penelitian yakni berupa pencatatan eksplorasi visual di perangkat lunak Geogebra serta perbandingan hasil numerik dari perhitungan manual dan Geogebra. Selanjutnya hasil studi pustaka, dokumentasi dan eksperimen mandiri dianalisis yang meliputi seluruh proses eksplorasi, temuan, dan refleksi yang didokumentasikan untuk dianalisis secara kualitatif. Dalam penelitian ini, data dianalisis menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif yang bertujuan untuk menginterpretasi makna dari aktivitas eksploratif dalam menghitung volume benda putar menggunakan kalkulus integral dan memvisualisasikannya dengan Geogebra. Analisis dilakukan melalui tahapan reduksi data, penyajian data dan penarikan kesimpulan (Miles et al., 2013).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini menggunakan dua jenis data utama yakni data analitik (teoritis) dan data numerik (eksperimen digital). Data analitik diperoleh dari hasil perhitungan manual suatu fungsi matematis sederhana menjadi objek rotasi. Dalam penelitian ini terdapat beberapa fungsi kurva sederhana yang diputar terhadap sumbu tertentu untuk memperoleh volume benda putar, antara lain kurva parabola, kurva linear dan kurva trigonometri. Adapun kriteria pemilihan fungsi antara lain keanekaragaman tipe fungsi, keterhitungan analitik dan representasi bentuk benda nyata yang mana dalam hal ini fungsi dipilih karena bentuk hasil rotasinya mirip benda nyata sehingga mempermudah interpretasi pedagogis. Sedangkan data numerik diperoleh dari luaran perangkat lunak Geogebra berupa nilai numerik hasil komputasi integral numerik, model 3D benda hasil rotasi (file .ggb atau tangkapan layar), serta metadata simulasi seperti pengaturan resolusi, toleransi numerik, ataupun waktu render. Spesifikasi objek penelitian tercantum dalam parameter fungsi ekspresi $f(x)$ atau $g(y)$ dengan interval batas bawah a dan atas b . Dalam penelitian ini semua fungsi kurva diputar terhadap sumbu x untuk konsistensi penelitian. Metode integral yang digunakan yakni metode cakram (*disk method*) dan metode kulit tabung (*shell method*). Metode cakram digunakan jika rotasi dilakukan terhadap sumbu utama (misalnya sumbu-

x) dan kurva langsung membentuk penampang lingkaran penuh dengan rumus: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$, yang mana $f(x)$ adalah jarak dari titik pada kurva ke sumbu rotasi (sebagai jari-jari lingkaran). Metode kulit tabung digunakan ketika perhitungan lebih mudah dilakukan berdasarkan keliling lingkaran dari irisan vertikal dikalikan tinggi benda $V = 2\pi \int_a^b y \cdot g(y) dy$, yang mana metode kulit tabung sangat efektif jika rotasi dilakukan terhadap sumbu yang **tidak berimpit** dengan kurva atau jika fungsi sulit diubah menjadi bentuk $x = g(y)$. Objek penelitian terdiri dari 3 kasus yang terangkum dalam **Tabel 1**.

Proses Perhitungan Volume secara Analitik

Contoh kasus 1: kurva $y = x^2$

Metode Cakram:

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx$$
$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{5} \approx 20,096 \text{ satuan volume}$$

Metode Selimut Tabung:

$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dy$$
$$V = 2\pi \int_0^2 x^3 dy$$
$$V = 2\pi \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^2$$
$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 16$$
$$V = \frac{32\pi}{4} = 8\pi \approx 25,12 \text{ satuan volume}$$

Dengan menggunakan langkah perhitungan yang sama, diperoleh hasil hitung analitik pada kasus 2 yaitu pada kurva linear sebesar $57\pi \approx 178,98$ satuan volume untuk metode cakram dan $45\pi \approx 141,3$ satuan volume untuk metode selimut tabung. Sedangkan untuk kasus 3 yaitu pada kurva trigonometri diperoleh sebesar $\pi^2/2 \approx 4.9298$ satuan volume untuk metode cakram dan $\pi^2 \approx 19.7192$ satuan volume untuk metode kulit tabung. Seluruh hasil perhitungan baik analitik maupun numerik telah terangkum pada **Tabel 2** dibawah ini.

Simulasi Geogebra

Simulasi dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Membuat kurva pada Geogebra, dilakukan dengan cara membuka aplikasi **Geogebra Classic 6**, selanjutnya pilih tampilan 3D graphics dan pada input bar diisi perintah
 - a. `Curve(x, x^2, 0, x, 0, 2)` untuk parabola
 - b. `Curve(x, 2x+1, 0, x, 0, 3)` untuk garis lurus
 - c. `Curve(x, sin(x), 0, x, 0, pi)` untuk sinusSelanjutnya, tekan **Enter** untuk memunculkan kurva.
2. Membuat bidang rotasi
 - a. Aktifkan Surface of Revolution Tool (atau ketik perintah manual di Input Bar)
 - b. `Surface((u cos(v), f(u), u sin(v)), u, a, b, v, 0, alpha)` → sumbu y
 - c. `Surface((u, f(u) cos(v), f(u) sin(v)), u, a, b, v, 0, alpha)` → sumbu x
 - d. Lakukan hal serupa untuk fungsi linear dan trigonometri.
3. Menentukan volume secara analitik
 - Gunakan rumus metode cakram:

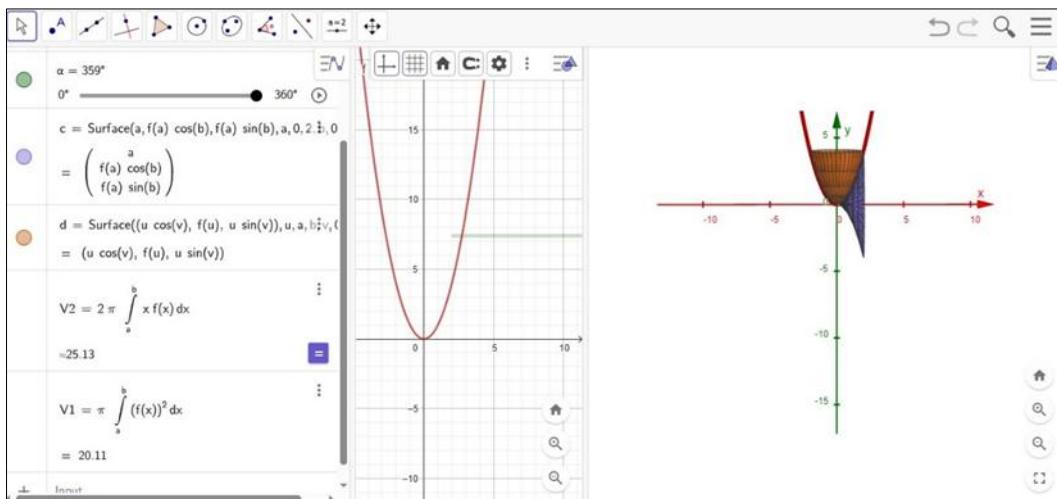
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- Gunakan rumus metode kulit tabung:

$$V = 2\pi \int_a^b y \cdot g(y) dy$$

Tabel 1. Objek Penelitian

Kasus	Kurva	Fungsi	Interval	Sumbu Rotasi Shell Method	Sumbu rotasi Disk Method
1	Parabolik	$y = x^2$	[0,2]	sumbu y	sumbu-x
2	Linear	$y = 2x + 1$	[0,3]	sumbu y	sumbu-x
3	Trigonometri	$y = \sin(x)$	[0,π]	sumbu y	sumbu-x

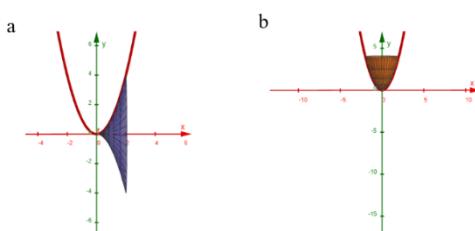


Gambar 1. Hasil analisis hitung numerik volume benda putar dan visualisasi 3D menggunakan Geogebra

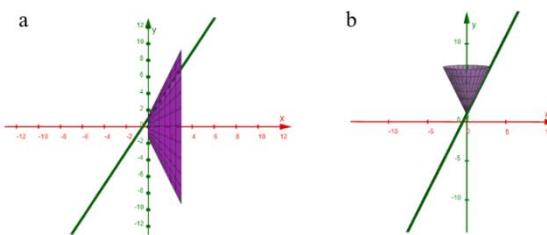
Berdasarkan hasil luaran simulasi Geogebra pada ketiga kasus, maka dapat diperoleh data rekap berikut ini seperti yang tertera pada Tabel 2 berikut dengan hasil simulasi 3D luaran Geogebra yang terbagi menjadi 3 kasus yakni kasus 1 pada kurva parabolik, kasus 2 pada kurva linear dan kasus 3 pada kurva trigonometri yang terlihat pada Gambar 2, 3 dan 4 secara berurutan berikut ini.

Tabel 2. Rekap hasil perhitungan analitik dan numerik

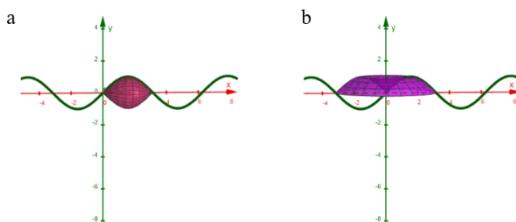
No	Fungsi	Interval	Sumbu	Metode	Volume Manual	Volume Geogebra	Selisih (%)
1	$y = x^2$	[0,2]	X	Disk	20,096	20,11	0,069666
2	$y = 2x + 1$	[0,3]	X	Disk	178,98	179,07	0,050285
3	$y = \sin(x)$	[0,π]	X	Disk	4,9298	4,93	0,004057
4	$y = x^2$	[0,2]	Y	Shell	25,12	25,13	0,039809
5	$y = 2x + 1$	[0,3]	Y	Shell	141,3	141,37	0,04954
6	$y = \sin(x)$	[0,π]	Y	Shell	19,7192	19,74	0,105481



Gambar 2. Visualisasi 3D volum benda putar pada kurva parabolik terhadap (a) sumbu rotasi x, dan (b) sumbu rotasi y



Gambar 3. Visuliasi 3D volum benda putar pada kurva linear terhadap (a) sumbu rotasi x, dan (b) sumbu rotasi y



Gambar 4. Visuliasi 3D volum benda putar pada kurva trigonometri terhadap (a) sumbu rotasi x, dan (b) sumbu rotasi y

Berdasarkan hasil perhitungan volume benda putar secara analitik dan simulasi menggunakan Geogebra, diperoleh temuan bahwa pendekatan integral memberikan hasil yang konsisten dengan visualisasi numerik. Pada kasus fungsi linear $f(x) = 2x+1$ yang diputar terhadap sumbu x pada interval $[0,3]$, perhitungan integral dengan metode cakram dan kulit tabung menghasilkan volume secara berurutan sebesar $57\pi \approx 178,98$ dan $45\pi \approx 141,3$. Melalui simulasi Geogebra dengan fitur Integral serta rotasi 3D, diperoleh besar volume rotasi dengan metode cakram dan metode kulit tabung secara berurutan sebesar 179,07 dan 141,37. Hal ini menunjukkan terdapat selisih nilai yang sangat minim yakni 0,050285% dan 0,04954%. Sehingga membuktikan bahwa perangkat lunak tersebut mampu merepresentasikan konsep integral dalam bentuk visual sekaligus numerik. Hal ini menunjukkan keterhubungan yang erat antara konsep teoretis kalkulus integral dengan implementasi komputasional.

Untuk fungsi parabolik $f(x)=x^2$ pada interval $[0,2]$, volume yang dihasilkan dari metode cakram adalah $\frac{32\pi}{5} \approx 20,096$, dan kulit tabung sebesar $88\pi \approx 25,12$. Simulasi Geogebra memperlihatkan bentuk solid rotasi menyerupai kerucut dan mangkuk paraboloid, yang dapat diputar dan diamati secara interaktif. Temuan ini memperkuat bahwa Geogebra tidak hanya berfungsi sebagai alat bantu perhitungan, tetapi juga mampu memvisualisasikan interpretasi geometris dari integral tertentu. Visualisasi ini memberi pemahaman yang lebih mendalam tentang bagaimana area di bawah kurva dapat menghasilkan volume ketika diputar terhadap sumbu tertentu.

Pada kasus fungsi trigonometri, yaitu $f(x) = \sin x$ pada interval $[0,\pi]$, volume benda putar terhadap sumbu x dengan metode cakram menghasilkan nilai $\frac{\pi^2}{2} \approx 4,9298$ dan $2\pi^2 \approx 19,7192$. Berdasarkan pembulatan nilai, hasil ini sejalan dengan integrasi analitik maupun hasil perhitungan numerik Geogebra khususnya pada perhitungan dengan metode cakram. Bentuk 3D yang dihasilkan memperlihatkan pola gelombang yang terputar membentuk solid menyerupai drum sinusoidal. Perbandingan antara pendekatan analitik dan numerik menunjukkan selisih yang sangat kecil yakni 0,004057%, yang terutama disebabkan oleh keterbatasan ketelitian numerik saat menggunakan pembagian interval diskret di Geogebra.

Secara keseluruhan, hasil penelitian ini menegaskan bahwa metode kulit tabung dalam kalkulus integral dapat dieksplorasi secara lebih intuitif dengan bantuan Geogebra. Dari sisi konseptual, peneliti dapat memahami hubungan antara rumus integral dan bentuk geometris. Dari sisi praktis, Geogebra mempermudah validasi hasil analitik dengan cara cepat dan interaktif. Dengan demikian, kombinasi pendekatan teoretis dan teknologi berbasis Geogebra terbukti efektif dalam meningkatkan pemahaman mengenai volume benda hasil rotasi kurva sederhana.

Penelitian ini sesuai dengan penelitian sebelumnya yakni diketahui konsep integral yang digunakan dalam menghitung volume bola dengan menggunakan bantuan software berupa aplikasi GeoGebra dapat menghasilkan hasil yang cukup akurat(Irvan, 2024). Selain itu, penerapan geogebra berdampak positif, efektif, dan lebih unggul dalam meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis peserta didik dalam proses pembelajaran (Fatihah & Yahfizham, 2024) serta membuat peserta didik menjadi lebih tertarik dan bersemangat (Nongharnpituk et al., 2022). Sehingga dengan hasil temuan ini menunjukkan peluang yang baik untuk mengembangkan kurikulum matematika yang terintegrasi teknologi untuk pengajaran dan pembelajaran kalkulus, khususnya kalkulus integral.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang menunjukkan bahwa nilai volume yang diperoleh melalui Geogebra sangat mendekati hasil analitik, dengan selisih rata-rata 0,05% atau kurang dari 1% maka dapat disimpulkan bahwa integrasi antara metode analitik dan numerik berbantu Geogebra tidak hanya dapat meningkatkan akurasi, tetapi juga memperkuat aspek visual dan konseptual dalam pembelajaran kalkulus. Kalkulus integral terbukti menjadi metode yang efektif dalam menghitung volume benda putar, baik dengan pendekatan metode cakram maupun kulit tabung. Melalui integral tentu diperoleh rumus umum yang dapat diaplikasikan pada berbagai bentuk kurva (linear, parabolik, maupun trigonometri) dengan batas tertentu. Metode cakram dan kulit tabung saling melengkapi, di mana metode cakram lebih sesuai untuk rotasi terhadap sumbu utama yang melewati kurva, sedangkan metode kulit tabung lebih fleksibel pada kasus rotasi terhadap sumbu yang sejajar atau pada bentuk fungsi tertentu. Hasil simulasi 3D di Geogebra menunjukkan visualisasi yang sangat membantu dalam memahami konsep benda putar. Dengan simulasi, peneliti dapat melihat bentuk nyata volume hasil rotasi kurva, sehingga memperkuat pemahaman konsep integral yang semula abstrak. Perbandingan antara hasil analitik dan numerik di Geogebra memberikan hasil yang konsisten, di mana selisih yang muncul hanya disebabkan oleh pembulatan dan pendekatan numerik. Hal ini membuktikan bahwa Geogebra dapat menjadi media valid untuk mendukung pembelajaran maupun penelitian terkait kalkulus integral. Dengan demikian, untuk mengembangkan kurikulum matematika yang terintegrasi teknologi untuk pengajaran dan pembelajaran kalkulus, khususnya kalkulus integral dapat dilakukan.

Daftar Pustaka

- Fatihah, A., & Yahfizham, Y. (2024). Penerapan Geogebra terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa dalam Pembelajaran Matematika. *Pendekar: Jurnal Pendidikan Berkarakter*, 2(3). <https://doi.org/10.51903/pendekar.v2i3.737>
- Hayati, Z., & Ulya, K. (2022). DEVELOPING STUDENTS' MATHEMATICAL UNDERSTANDING USING GEOGEBRA SOFTWARE. *JURNAL ILMIAH DIDAKTIKA: Media Ilmiah Pendidikan Dan Pengajaran*, 22(2). <https://doi.org/10.22373/jid.v22i2.11451>
- Irvan, I. (2024). Application of Integrals in Calculating Ball Volume using GeoGebra. *Indonesian Journal of Education and Mathematical Science*, 5(1). <https://doi.org/10.30596/ijems.v5i1.18086>
- Jr, G. T., Weir, M., & Hass, J. (2014). *Thomas' Calculus* (13th edition). Pearson.
- Kado, & Dem, N. (2020). Effectiveness of GeoGebra in Developing the Conceptual Understanding of Definite Integral at Gongzim Ugyen Dorji Central School, in Haa Bhutan. *Asian Journal of Education and Social Studies*, 60–65. <https://doi.org/10.9734/ajess/2020/v10i430276>
- Maf'ulah, S., Wulandari, S., Jauhariyah, L., & Ngateno. (2021). Pembelajaran Matematika dengan Media Software GeoGebra Materi Dimensi Tiga. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, 10(3). <https://doi.org/10.31980/mosharafa.v10i3.676>
- Meldi, N. F., Khoriyani, R. P., Susanti, W., Ahmad, D., & Rif'at, M. (2022). IMPLEMENTASI TEKNOLOGI DIGITAL DALAM PERKULIAHAN MATAKULIAH KALKULUS INTEGRAL DALAM PENYELESAIAN LUAS DAERAH ANTARKURVA. *Jurnal Alwatzikhoebillah : Kajian Islam, Pendidikan, Ekonomi, Humaniora*, 8(2). <https://doi.org/10.37567/alwatzikhoebillah.v8i2.1506>

- Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldana, J. (2013). *Qualitative Data Analysis: A Methods Sourcebook*. SAGE Publications.
- Nasution, A. E., Irvan, I., & Batubara, I. H. (2020). Penerapan Model Problem Based Learning dan Etnomatematik Berbantuan Geogebra Untuk Meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematis. *Journal Mathematics Education Sigma [JMES]*, 1(2). <https://doi.org/10.30596/jmes.v1i1.7506>
- Nongharnpituk, P., Yonwilad, W., & Khansila, P. (2022). The Effect of GeoGebra Software in Calculus for Mathematics Teacher Students. *Journal of Educational Issues*, 8(2), 755–770.
- Nuratifah, S., T, A. Y., Siregar, N., & Meldi, N. F. (2024). Peran Aplikasi Geogebra dalam Kemampuan Representasi Visual Matematis Siswa pada Materi Fungsi. *J-PiMat : Jurnal Pendidikan Matematika*, 6(2). <https://doi.org/10.31932/j-pimat.v6i2.3902>
- Sofyan, D., Puspitasari, N., Maryati, I., Basuki, B., & Madio, S. (2020). The Effects of GeoGebra on Problems Solving Skill in the Integral Calculus. *Proceedings of the 1st International Conference on Islam, Science and Technology, ICONISTECH 2019, 11-12 July 2019, Bandung, Indonesia*. Proceedings of the 1st International Conference on Islam, Science and Technology, ICONISTECH 2019, 11-12 July 2019, Bandung, Indonesia, Bandung, Indonesia. <https://doi.org/10.4108/eai.11-7-2019.2297424>
- Stewart, J. (2020). *Calculus: Early Transcendentals*, 8/E. Cengage Learning. <https://openlibrary.telkomuniversity.ac.id/pustaka/159921/calculus-early-transcendentals-8-e.html>
- Subagio, L., Karnasih, I., & Irvan, I. (2021). Meningkatkan Motivasi Belajar Siswa Dengan Menerapkan Model Discovery-Learning dan Problem-Based-Learning Berbantuan Geogebra. *Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia*, 6(2). <https://doi.org/10.33369/jpmr.v6i2.15733>
- Sugiyono, & Sofia Yustiyani Suryandari. (2017). Metode Penelitian Kualitatif: Untuk penelitian yang bersifat eksploratif, interpretif, interaktif, dan konstruktif | Perpustakaan Nalanda (1st ed.). Alfabeta. //e-library.nalanda.ac.id%2Findex.php%3Fp%3Dshow_detail%26id%3D859%26keywords%3D
- Tasman, F., & Ahmad, D. (2018). Visualizing Volume to Help Students Understand the Disk Method on Calculus Integral Course. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 335(1), 012112. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/335/1/012112>